

Введение.

При проектировании систем стабилизации и управления летательных аппаратов важным этапом является выявление динамических свойств летательного аппарата (ЛА) как объекта управления. Имеется обширная отечественная и зарубежная литература, посвященная построению математической модели динамики движения летательного аппарата.

Настоящие методические указания облегчают работу с этой литературой, дают рациональные приемы вывода уравнений движения ЛА и их линеаризации.

§ 1. Системы координат, применяемые в динамике полета.

Задачи динамики полета самолетов и ракет рассматриваются обычно в топоцентрической системе отсчета. Начало топоцентрической системы координат помещается в пункте наблюдения, в частности, на поверхности земного шара. Эта система используется в тех случаях, когда рассматривается движение по отношению к поверхности Земли.

I. Земная система координат.

Частный случай топоцентрической системы координат – земная система координат. Земных координат несколько. За начало земной системы прямоугольных координат можно принимать центр масс Земли, точку старта или другую неподвижную относительно Земли точку. Выберем земную систему координат следующим образом (рис. 1).

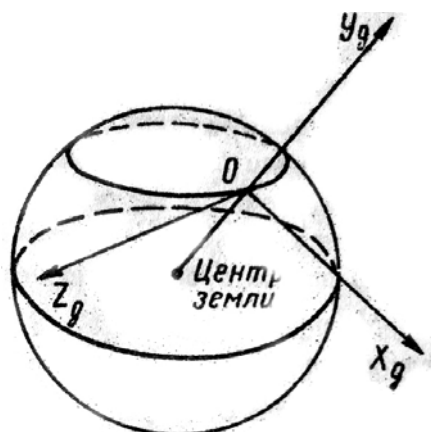


Рис. 1. Земная система координат

Ось OY_g – прямая, соединяющая центр Земли с точкой старта на её поверхности. Ось OX_g перпендикулярна оси OY_g и лежит в вертикальной плоскости прицеливания или начального движения ЛА в момент старта. Ось OZ_g дополняет систему до правой. Такая система координат называется нормальной земной системой координат $OX_gY_gZ_g$. Часто начало координат нормальной земной системы помещают в центре масс ЛА, а направление её осей совпадает с начальным направлением этих осей в момент старта. Таким образом, определяется нормальная система координат $OX_gY_gZ_g$, а её оси в данном случае совпадают также с осями стартовой системы $OX_cY_cZ_c$. В дальнейшем нормальную систему будем обозначать индексом g .

Задав оси системы координат, можно выбрать базис, в котором любой вектор запишется так:

$$\bar{a} = a_{xg} \bar{i}_g + a_{yg} \bar{j}_g + a_{zg} \bar{k}_g,$$

где $\bar{i}_g, \bar{j}_g, \bar{k}_g$ – единичные векторы.

II. Связанная система координат

Начало связанной системы координат (рис. 2) помещают в центре масс ЛА, который будем считать неподвижным относительно корпуса ЛА. Ось Ox направлена вдоль строительной оси корпуса ЛА вперед. Ось Oy располагают в той плоскости симметрии ЛА, которая в момент пуска совпадает с плоскостью стрельбы. Ось Oy перпендикулярна оси Ox и направлена вверх. Ось Oz дополняет систему до правой. Связанная система координат неподвижна относительно корпуса ЛА. Обозначать её будем индексом I .

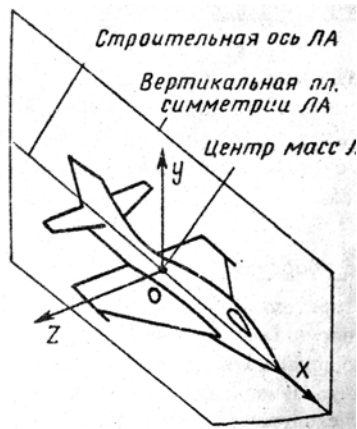


Рис. 2. Связная система координат

III. Скоростная система координат

В скоростной системе координат (рис. 3) ось Ox_a совпадает с направлением вектора скорости полёта центра масс ЛА и закреплена в центре масс, ось Oy_a перпендикулярна ей, лежит в вертикальной плоскости симметрии ЛА и направлена вверх. Ось Oz_a перпендикулярна осям Ox_a и Oy_a и дополняет их до правой тройки. Скоростную систему будем обозначать индексом a .

IV. Траекторная система координат

В траекторной системе координат (рис. 4) ось Ox_k , как и в скоростной, совпадает с направлением вектора скорости, ось Oy_k направлена перпендикулярно ей и лежит в местной вертикальной плоскости, ось Oz_k перпендикулярна первым двум, лежит в горизонтальной плоскости и направлена в сторону правого крыла.

Траекторную систему обозначим индексом k .



Рис. 3. Скоростная система координат

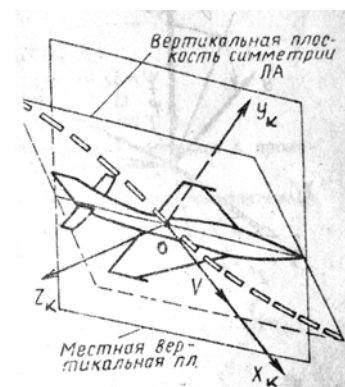


Рис. 4. Траекторная система координат

§ 2. Связь между системами координат

Определенные в § 1 системы координат являются ортогональными, поэтому переход из системы координат А в систему координат В характеризуется ортогональным преобразованием

$$\vec{a}^{(B)} = T(B, A)\vec{a}^{(A)}$$

Для ортогональных матриц справедливо:

$$T^{-1}(B, A) = T^T(B, A);$$

$$T(B, A) = T^T(A, B)$$

1. Как видно из рис. 5, связанная и нормальная системы связаны между собой через углы Эйлера.

Обычно принимается следующий порядок поворота координатных осей.

1) Поворот вокруг оси OY_g на угол ψ – угол рыскания. Это угол между проекцией связанной оси OX на местную горизонтальную плоскость и направлением оси OX_g нормальной системы.

2) Поворот на угол ϑ – угол тангажа. Это угол между направлением связанной оси OX и местной горизонтально плоскостью.

3) Поворот на угол γ – угол крена. Это угол между вертикальной плоскостью симметрии ЛА и местной вертикальной плоскостью, содержащей ось OX .

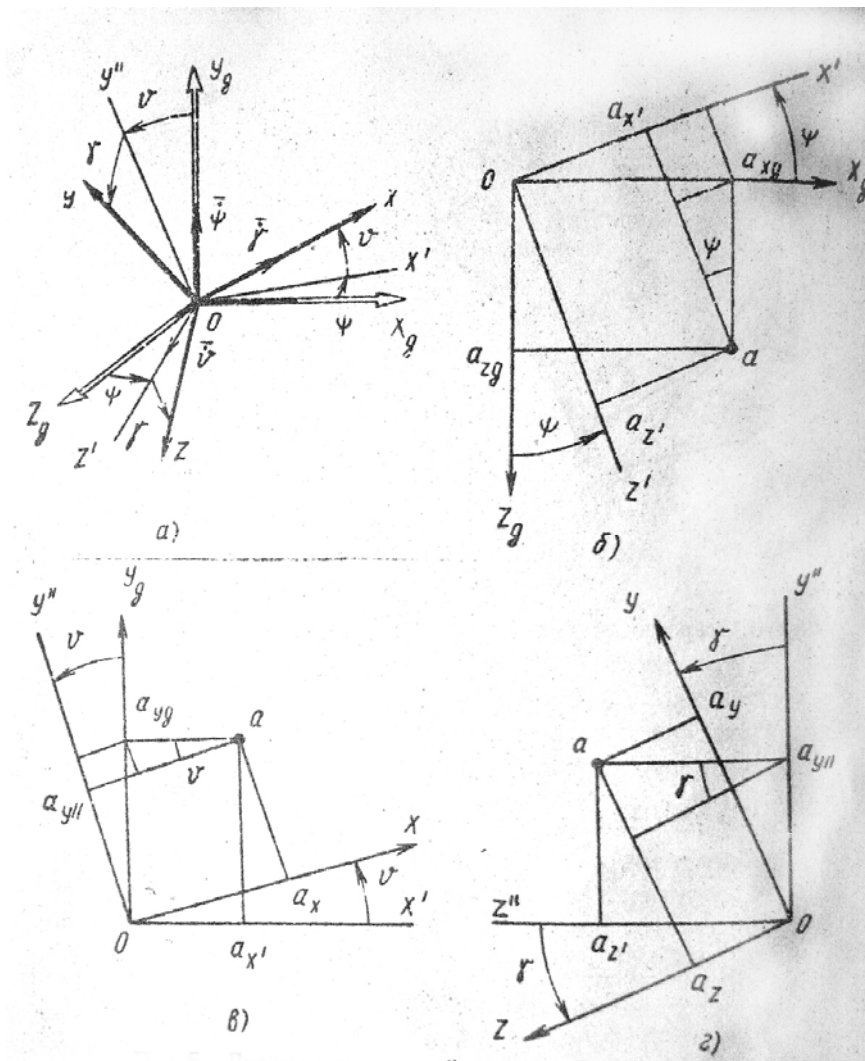


Рис. 5. Переход из земной системы координат в связанную.

Найдем матрицу $T(1, g)$ перехода из нормальной системы координат в связанную (рис. 5а). Первый поворот происходит в плоскости $OX_g Y_g$ на угол ψ . Из рис. 5б видно:

$$a_{x'} = a_{xg} \cos \psi - a_{zg} \sin \psi ;$$

$$a_{y'} = a_{yg} ;$$

$$a_{z'} = a_{xg} \sin \psi + a_{zg} \cos \psi .$$

Таким образом,

$$T(\psi, g) = \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix}$$

– это матрица перехода из нормальной системы координат в промежуточную систему $OX'Y_g Z'$.

На рис. 5в иллюстрируется второй поворот на угол тангажа ϑ в плоскости $OX'Y_g$. Из рисунка следует, что

$$a_x = a_{x'} \cos \vartheta + a_{y_g} \sin \vartheta ;$$

$$a_{z''} = a_{z'} ;$$

$$a_{y''} = a_{y_g} \cos \vartheta - a_{x'} \sin \vartheta ;$$

Таким образом, матрица перехода из системы $OX'Y_g Z'$ во вторую промежуточную систему $OXY''Z''$ имеет вид

$$T(\nu, \psi) = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

И, наконец, поворот на угол крена γ вокруг оси OX приводит к переходу в связанную систему координат (рис. 5г):

$$a_x = a_x$$

$$a_y = a_{y''} \cos \gamma + a_{z''} \sin \gamma ;$$

$$a_z = a_{z''} \cos \gamma - a_{y''} \sin \gamma .$$

Матрица перехода из системы $OXY''Z''$ в систему $OXYZ$ имеет вид:

$$T(1, \nu) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}$$

Найдем искомую матрицу: $T(1, g) = T(1, \vartheta)T(\vartheta, \psi)T(\psi, g)$,

$$T(1, g) = \begin{bmatrix} \cos \vartheta \cos \psi & \sin \vartheta & -\cos \vartheta \sin \psi \\ -\cos \gamma \sin \vartheta \cos \psi + \sin \gamma \sin \psi & \cos \gamma \cos \vartheta & \cos \gamma \sin \vartheta \sin \psi + \sin \gamma \cos \psi \\ \sin \gamma \sin \vartheta \cos \psi + \cos \gamma \sin \psi & -\sin \gamma \cos \vartheta & -\sin \psi \sin \vartheta \sin \gamma + \cos \psi \cos \gamma \end{bmatrix}$$

2. Скоростная и нормальная системы координат (рис. 6) связаны между собой через три угла Эйлера, которые перечислены в порядке последовательности поворотов:

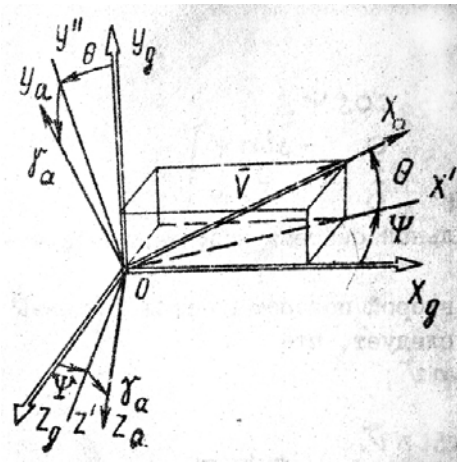


Рис. 6. Переход из нормальной системы координат в скоростную

Ψ – угол пути, или угол поворота траектории ЛА. Это угол между проекцией вектора скорости на местную горизонтальную плоскость и осью Ox_g нормальной системы координат;

Θ – угол наклона к горизонту касательной к траектории ЛА (угол между вектором скорости и местной горизонтальной плоскостью). Угол Θ называют углом наклона траектории;

γ_a – угол крена в скоростной системе координат.

Нетрудно видеть, что матрицу перехода из нормальной системы координат в скоростную $T(a,g)$ можно получить из известной уже матрицы $T(1,g)$ путём соответственной замены углов ψ , ν и γ на Ψ , Θ и γ_a :

$$T(a,g) = \begin{bmatrix} \cos \Theta \cos \Psi & \sin \Theta & -\cos \Theta \sin \Psi \\ -\cos \gamma_a \sin \Theta \cos \Psi + \sin \gamma_a \sin \Psi & \cos \gamma_a \cos \Theta & \cos \gamma_a \sin \Theta \sin \Psi + \sin \gamma_a \cos \Psi \\ \sin \gamma_a \sin \Theta \cos \Psi + \cos \gamma_a \sin \Psi & -\sin \gamma_a \cos \Theta & -\sin \Psi \sin \Theta \sin \gamma_a + \cos \Psi \cos \gamma_a \end{bmatrix}$$

3. Траекторную систему координат можно получить из нормальной с помощью двух последовательных поворотов на углы Ψ и Θ .

Матрицу перехода из нормальной в траекторную систему координат $T(k,g)$ можно получить из матрицы $T(a,g)$, положив в ней $\gamma_a = 0$

$$T(k,g) = \begin{bmatrix} \cos \Theta \cos \Psi & \sin \Theta & -\cos \Theta \sin \Psi \\ -\sin \Theta \cos \Psi & \cos \Theta & \sin \Theta \sin \Psi \\ \sin \Psi & 0 & \cos \Psi \end{bmatrix}$$

А матрицу перехода с траекторной системы к скоростной $T(a,k)$ получим как матрицу третьего поворота на угол γ_a при переходе из нормальной системы к связанной, заменив в ней γ на γ_a :

$$T(a,k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma_a & \sin \gamma_a \\ 0 & -\sin \gamma_a & \cos \gamma_a \end{bmatrix}$$

4. Связанная система координат может быть получена из скоростной системы координат с помощью двух последовательных поворотов – на углы β и α (рис. 7).

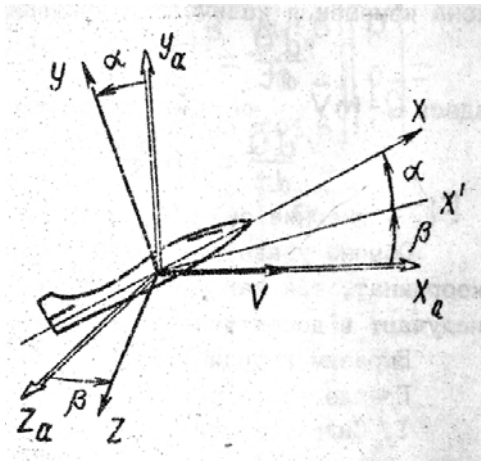


Рис. 7. Переход из скоростной системы в связанную

β – угол скольжения между вектором скорости и его проекцией на вертикальную плоскость симметрии ЛА; α – угол атаки, это угол между осью ОХ связанной системы координат и проекций скорости на плоскость ОХУ.

Матрицу $T(1,a)$ перехода из скоростной системы координат в связанную, запишем так же, как и матрицу $T(k,g)$ перехода из нормальной системы в траекторную, заменив в последней углы Ψ и Θ на α и β :

$$T(1,a) = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \alpha & -\cos \alpha \sin \beta \\ -\sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha & \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

Подробная классификация систем координат и матриц перехода из одной системы в другую дана в [2].

В рекомендуемой литературе [1]-[5] все определения и обозначения даны в соответствии с ГОСТ 1075-41. Для облегчения перехода от системы обозначений ГОСТ 1075-41 к принятой в настоящее время системе ГОСТ 20058-74 следует пользоваться.

§ 3. Дифференциальные уравнения движения летательного аппарата

При выводе уравнений движения ЛА делает следующие допущения:

1. ЛА рассматривается как абсолютно твёрдое тело переменной массы, имеющие 6 степеней свободы.

2. Моменты инерции ЛА постоянны.

3. ЛА имеет вертикальную плоскость симметрии.

3. Не учитываются влияние ветра, сферичность и вращение земли.

Уравнения движения центра масс ЛА получим основании закона изменения количества движения центра масс:

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum_i \bar{F}_i,$$

Здесь $\bar{Q} = m\bar{V}$ – вектор количества движения ЛА,

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = m \frac{d\bar{V}}{dt};$$

\bar{F}_i – внешние силы, действующие на ЛА.

Обычно уравнения сил проецируют на оси траекторной системы координат, так как в это случае $V_x=V$, $V_y=V_z=0$ и уравнения получают в достаточно простом виде.

Выразим координаты всех сил в базисе траекторной системы.

Прежде всего рассмотрим эти силы.

1. Сила тяжести. Поскольку эта сила направлена по местной вертикали, её обычно задают в базе нормальной системы координат:

$$\bar{G}^{(g)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -G \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Сила тяги двигателя приложена в центре масс двигателя и направлена по оси ОХ связанной системы. Она задается в базе связанной системы координат:

$$\bar{P}^{(1)} = \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Равнодействующая аэродинамических сил обычно записывается в базе скоростной системы:

$$\bar{R}^{(a)} = \begin{bmatrix} -X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

где X – сила лобового сопротивления;

Y – подъемная сила;

Z – боковая сила.

Запишем эти силы в проекциях на оси траекторной системы:

$$\bar{G}^{(k)} = T^T(g, k) \bar{G}^{(g)} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \sin \Theta & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \cos \Theta & \tau_{23} \\ \tau_{31} & 0 & \tau_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ G \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G \sin \Theta \\ -G \cos \Theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{P}^{(k)} &= T^T(k, 1) \bar{P}^{(1)} = T(k, a) T(a, 1) \bar{P}^{(1)} = T^T(a, k) T^T(1, a) \bar{P}^{(1)} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma_a & -\sin \gamma_a \\ 0 & \sin \gamma_a & \cos \gamma_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ -\cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \sin \alpha \sin \gamma_a + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma_a & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \sin \alpha \cos \gamma_a - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma_a & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Окончательно

$$\bar{P}^{(k)} = \begin{bmatrix} P \cos \alpha \cos \beta \\ P(\sin \alpha \sin \gamma_a + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma_a) \\ P(\sin \alpha \sin \gamma_a - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma_a) \end{bmatrix}$$

Аэродинамические силы выразятся так:

$$\begin{aligned} \bar{R}^{(k)} &= T(k, a) \bar{R}^{(a)} = T^T(a, k) \bar{R}^{(a)} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma_a & -\sin \gamma_a \\ 0 & \sin \gamma_a & \cos \gamma_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -X \\ Y \cos \gamma_a - Z \sin \gamma_a \\ Y \sin \gamma_a + Z \cos \gamma_a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Поскольку проекции вектора скорости в скоростной и траекторной системах координат совпадают, то запишем левую часть уравнения сил в базе траекторной системы:

$$\bar{V}^{(k)} = T(k, a)\bar{V}^{(a)} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Дифференцируем $\bar{V}^{(k)}$ по правилам дифференцирования вектора, записанного в подвижном базисе:

$$\frac{d\bar{V}^{(k)}}{dt} = \frac{d\bar{V}}{dt} + (\bar{\omega}_B^{(k)} \times \bar{V}^{(k)}),$$

где $\frac{dV}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{V} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ – локальная производная по времени, взятая в предположении

неподвижного базиса; $\bar{\omega}_B^{(k)}$ – угловая скорость вращения базиса.

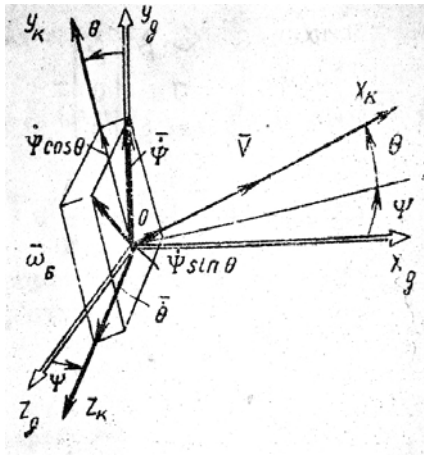


Рис. 8. Вращение базиса траекторной системы координат в нормальной.

Обратимся к рис. 8. Нетрудно видеть, что вектор угловой скорости траекторной системы координат $\bar{\omega}_B^{(k)}$ относительно осей нормальной системы может быть вычислен с помощью вектора $\bar{\Psi}$, определяющего поворот на угол Ψ относительно оси OY_g нормальной системы, и вектора $\bar{\Theta}$, определяющего поворот на угол Θ вокруг оси OZ_k траекторной системы. Спроецируем векторы $\bar{\Psi}$ и $\bar{\Theta}$ на оси траекторной системы:

$$\bar{\omega}_B^{(k)} = \begin{bmatrix} \dot{\Psi} \sin \Theta \\ \dot{\Psi} \cos \Theta \\ \dot{\Theta} \end{bmatrix}$$

Тогда векторное произведение

$$(\bar{\omega}_B^{(k)} \times \bar{V}^{(k)}) = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \dot{\Psi} \sin \Theta & \dot{\Psi} \cos \Theta & \dot{\Theta} \\ V & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ V\dot{\Theta} \\ -V\dot{\Psi} \cos \Theta \end{bmatrix}$$

Таким образом, получили уравнения сил в проекциях на оси траекторной системы координат:

$$m \frac{dV}{dt} = -G \sin \Theta + P \cos \alpha \cos \beta - X ; \quad (1)$$

$$mV \frac{d\Theta}{dt} = -G \cos \Theta + P(\sin \alpha \cos \gamma_a + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma_a) + Y \cos \gamma_a - Z \sin \gamma_a; \quad (2)$$

$$-mV \cos \Theta \frac{d\psi}{dt} = P(\sin \alpha \sin \lambda_a - \cos \alpha \sin \beta \cos \lambda_a) + Y \sin \lambda_a + Z \cos \lambda_a. \quad (3)$$

Уравнение моментов, характеризующее вращение ЛА вокруг центра масс, получим на основании теоремы об изменении кинетического момента:

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \sum_i \bar{M}_i,$$

где \bar{M}_i – внешние моменты, действующие на ЛА;

$\bar{L} = J\bar{\omega}$ – вектор кинетического момента относительно центра масс;

Здесь $\bar{\omega}$ – вектор угловой скорости вращения ЛА относительно центра масс;

$$J = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{bmatrix} \text{ – тензор инерции (здесь главными являются оси связанной}$$

системы координат);

J_i – моменты инерции относительно главных осей;

J_{ij} – центробежные моменты инерции.

Для ЛА, имеющих две взаимно перпендикулярные плоскости симметрии,

$$J = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}.$$

Для самолетов

$$J = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & 0 \\ -J_{xy} & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}.$$

Уравнение моментов в аэродинамике проецируют на оси связанной системы координат. Положим, что ЛА имеет две плоскости симметрии, т.е.

$$J = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}.$$

Запишем вектор угловой скорости в проекциях на оси связанной системы:

$$\bar{\omega}^{(1)} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\bar{L}^{(1)} = J\bar{\omega}^{(1)} = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_x \omega_x \\ J_y \omega_y \\ J_z \omega_z \end{bmatrix}$$

Найдём полную производную

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{L}^{(1)}}{dt} &= \frac{d\bar{L}}{dt} + (\bar{\omega}^{(1)} \times \bar{L}^{(1)}) = \\ &= \begin{bmatrix} J_x \dot{\omega}_x \\ J_y \dot{\omega}_y \\ J_z \dot{\omega}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & j & k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ J_x \omega_x & J_y \omega_y & J_z \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_x \dot{\omega}_x \\ J_y \dot{\omega}_y \\ J_z \dot{\omega}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (J_z - J_y) \omega_y \omega_z \\ (J_x - J_z) \omega_x \omega_z \\ (J_y - J_x) \omega_x \omega_y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Внешние моменты, действующие на ЛА в проекциях на связанные оси, запишем в следующем виде:

$$\sum_i \bar{M}_i = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

Таким образом, имеем:

$$J_x \frac{d\omega_x}{dt} = M_x - (J_z - J_y) \omega_y \omega_z; \quad (4)$$

$$J_y \frac{d\omega_y}{dt} = M_y - (J_x - J_z) \omega_x \omega_z; \quad (5)$$

$$J_z \frac{d\omega_z}{dt} = M_z - (J_y - J_x) \omega_x \omega_y. \quad (6)$$

Для ЛА с двумя плоскостями симметрии, как правило, выполняется соотношение $J_y = J_z$. Тогда первое из уравнений моментов принимает вид:

$$J_x \frac{d\omega_x}{dt} = M_x.$$

Теперь необходимо составить кинематические уравнения, характеризующие вращения ЛА относительно осей нормальной системы координат. В уравнениях (4) – (6) заданы проекции угловой скорости относительно связанных осей: ω_x , ω_y , ω_z . При переходе из нормальной системы в связанную (рис. 5а) осуществляется вращения ЛА последовательно на угол ϑ с угловой скоростью $\dot{\vartheta}$ относительно оси OY_g , на угол ϱ с угловой скоростью $\dot{\varrho}$ вокруг оси OZ' и на угол γ с угловой скоростью $\dot{\gamma}$ вокруг оси OX . Таким образом, проекции угловой скорости $\dot{\vartheta}$, $\dot{\varrho}$, $\dot{\gamma}$ направлены по осям непрямоугольной системы координат OXY_gZ' :

$$\bar{\omega}^{(n)} = \begin{bmatrix} \dot{\vartheta} \\ \dot{\varrho} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}$$

Из рис. 5 видно, что

$$\omega_x = \dot{\vartheta} \sin \varrho + \dot{\gamma};$$

$$\omega_y = \dot{\vartheta} \cos \varrho \sin \gamma + \dot{\varrho} \sin \gamma;$$

$$\omega_z = -\dot{\vartheta} \cos \varrho \sin \gamma + \dot{\varrho} \cos \gamma.$$

Отсюда запишем матрицу перехода от непрямоугольной системы к связанной:

$$T(1, H) = \begin{bmatrix} \sin \varrho & 0 & 1 \\ \cos \varrho \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\cos \varrho \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \end{bmatrix}$$

Обычно требуется провести обратное преобразование $T(H, 1)$, которое находят по обычным правилам вычисления обратных матриц:

$$T(H,1) = T^{-1}(1,H) = \frac{\tilde{T}(1,H)}{|T(1,H)|}.$$

Нетрудно видеть, что определитель $|T(1,H)| = \cos \vartheta$.

Запишем взаимную матрицу

$$\tilde{T}(1,H) = \begin{bmatrix} 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \cos \vartheta \sin \gamma & \cos \vartheta \cos \gamma \\ \cos \vartheta & -\sin \vartheta \cos \gamma & \sin \vartheta \sin \gamma \end{bmatrix}.$$

Таким образом, связь между проекциями угловой скорости в разных базисах выражается следующими уравнениями:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\cos \vartheta} (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma); \quad (7)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma; \quad (8)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \omega_x - \operatorname{tg} \vartheta (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma). \quad (9)$$

Поскольку уравнения движения центра масс (1), (2), (3) записаны в траекторных осях, уравнения вращательного движения вокруг центра масс (4) – (9) – в связанных осях, а аэродинамические силы и моменты в правых частях уравнений (1) – (6) зависят от углов атаки α и скольжения β между скоростными и связанными осями, то возникает необходимость в добавлении к записанным уравнениям геометрических соотношений между углами Ψ , Θ , γ_a и углами ψ , ϑ , γ , α , β . Попробуем найти матрицу перехода от нормальной системы координат к скоростной. Перейдем сначала от нормальной системы координат к связанной, потом от связанной к скоростной, определив обратную матрицу к известной нам матрице перехода от скоростной к связанной системе координат:

$$T(a,g) = T(a,1)T(1,g) = T^T(1,a)T(1,g).$$

Матрица $T(a,g)$ нами получена выше. Найдем $T^T(1,a)T(1,g) =$

$$= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\cos \beta \sin \alpha & \sin \beta \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ -\cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} \cos \vartheta \cos \psi & \sin \vartheta & -\cos \vartheta \sin \psi \\ (-\cos \gamma \sin \vartheta \cos \psi + \sin \gamma \sin \psi) & \cos \gamma \cos \vartheta & (\cos \gamma \sin \vartheta \sin \psi + \sin \gamma \cos \psi) \\ (\sin \gamma \sin \vartheta \cos \psi + \cos \gamma \sin \psi) & -\sin \gamma \cos \vartheta & -\sin \psi \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta \cos \vartheta \cos \psi + \\ + \cos \beta \sin \alpha \cos \gamma \sin \vartheta \cos \psi - \\ - \cos \beta \sin \alpha \sin \gamma \sin \psi + \\ + \sin \beta \sin \gamma \sin \vartheta \cos \psi + \\ + \sin \beta \cos \gamma \sin \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta \sin \vartheta - \\ - \cos \beta \sin \alpha \cos \gamma \cos \vartheta - \\ - \sin \gamma \cos \vartheta \sin \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - \cos \alpha \cos \beta \cos \vartheta \sin \psi + \\ + \cos \beta \sin \alpha \cos \gamma \sin \vartheta \sin \psi - \\ - \cos \beta \sin \alpha \sin \gamma \cos \psi - \\ - \sin \psi \sin \vartheta \sin \gamma \sin \beta + \\ + \cos \psi \cos \gamma \sin \beta \end{pmatrix} \\
= \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \psi \sin \alpha - \\ - \cos \gamma \sin \vartheta \cos \psi \cos \alpha + \\ + \cos \alpha \sin \gamma \sin \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \alpha \sin \vartheta + \\ + \cos \alpha \cos \gamma \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - \sin \alpha \cos \vartheta \sin \psi + \\ + \cos \alpha \cos \gamma \sin \vartheta \sin \psi + \\ + \cos \alpha \sin \gamma \cos \psi \end{pmatrix} \\
= \begin{pmatrix} \cos \alpha \sin \beta \cos \vartheta \cos \psi - \\ - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \sin \vartheta \cos \psi + \\ + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \sin \psi + \\ + \cos \beta \cos \psi \sin \vartheta \sin \gamma + \\ + \cos \beta \cos \gamma \sin \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - \cos \alpha \sin \beta \sin \vartheta + \\ + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \cos \vartheta - \\ - \cos \beta \sin \gamma \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \sin \beta \cos \vartheta \sin \psi + \\ + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \sin \vartheta \sin \psi + \\ + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \cos \psi - \\ - \cos \beta \sin \psi \sin \vartheta \sin \gamma + \\ + \cos \beta \cos \psi \cos \gamma \end{pmatrix}$$

В силу свойств ортогональных матриц, связывающих их элементы равенствами, остаются независимыми три равенства, составляемые из элементов матриц $T(a, g)$ и $T^T(1, a)T(1, g)$ с индексами τ_{12} , τ_{13} , τ_{32} . Запишем эти уравнения геометрической связи углов Ψ , Θ , γ_a и ψ , ϑ , γ , α , β :

$$\sin \Theta = \cos \alpha \cos \beta \sin \vartheta - \sin \alpha \cos \beta \cos \vartheta \cos \gamma - \sin \beta \cos \vartheta \sin \gamma; \quad (10)$$

$$-\sin \psi \cos \Theta = -\cos \alpha \cos \beta \cos \vartheta \sin \psi - \sin \alpha \cos \beta (\cos \gamma \sin \vartheta \sin \psi + \\ + \sin \gamma \cos \psi) + \sin \beta (\cos \gamma \cos \psi - \sin \gamma \sin \vartheta \sin \psi); \quad (11)$$

$$-\sin \gamma_a \cos \Theta = \cos \alpha \sin \beta \sin \vartheta + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \cos \vartheta - \\ - \cos \beta \sin \gamma \cos \vartheta; \quad (12)$$

Дополним эту систему уравнениями, задающими проекции линейной скорости ЛА в нормальных осях координат. Используем при этом матрицу перехода от нормальной к траекторной системе:

$$\dot{r} = \bar{V}^{(g)} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}; \quad \bar{V}^{(k)} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{V}^{(g)} = T(g, k)\bar{V}^{(k)};$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Theta \cos \Psi & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \sin \Theta & \tau_{22} & \tau_{23} \\ -\cos \Theta \sin \Psi & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Итак, уравнения движения центра масс в нормальных осях выразятся так:

$$\frac{dx}{dt} = V \cos \Psi \cos \Theta; \quad (13)$$

$$\frac{dy}{dt} = V \sin \Theta; \quad (14)$$

$$\frac{dz}{dt} = -V \cos \Theta \sin \Psi; \quad (15)$$

Дадим последнее уравнение – уравнение тяги двигателя:

$$\frac{dm}{dt} = -|\dot{m}(t)|, \quad (16)$$

$|\dot{m}(t)|$ – секундный расход топлива.

Поскольку Земля имеет сферическую форму, необходимо задать функцию высоты от текущих координат ЛА в нормальной системе координат

$$H=H(x,y,z).$$

Если сферичностью пренебречь, что допустимо для траекторий движения ЛА широкого класса, то можно считать, что $H \approx Y$. (В дальнейшем так и будем полагать.)

Из аэродинамики известно [5], что аэродинамические силы и моменты, входящие в уравнения (1) – (6), могут быть вычислены по формулам:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + x^{\alpha^2} \alpha^2 + x^{\alpha\delta_B} \alpha \delta_B + x^{\beta^2} \beta^2 + x^{\beta\delta_H} \beta \delta_H + x^{\delta_H^2} \delta_H^2; \\ y &= y_0 + y^\alpha \alpha + y^{\delta_B} \delta_B; \\ z &= z^\beta \beta + z^{\delta_H} \delta_H; \\ M_x &= M_{x0} + M_x^\beta \beta + M_x^{\omega_x} \omega_x + M_x^{\omega_y} \omega_y + M_x^{\alpha\beta} \alpha\beta + M_x^{\alpha\omega_y} \alpha\omega_y + \\ &\quad + M_x^{\beta\omega_z} \beta\omega_z + M_x^{\delta_H} \delta_H + M_x^{\delta_\omega} \delta_\omega + M_x^{\delta\omega_B} \delta\omega_B + M_x^{\alpha\omega_H} \alpha\omega_H; \\ M_y &= M_y^\beta \beta + M_y^{\omega_x} \omega_x + M_y^{\omega_y} \omega_y + M_y^{\dot{\beta}} \dot{\beta} + M_y^{\delta_H} \delta_H + M_y^{\dot{\delta}_H} \dot{\delta}_H; \\ M_z &= M_{z0} + M_z^\alpha \alpha + M_z^{\omega_z} \omega_z + M_z^{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + M_z^{\delta_B} \delta_B + M_z^{\dot{\delta}_B} \dot{\delta}_B. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Здесь

$$x_0 - \text{значение } x \text{ при } \alpha = \delta_B = \delta_H = \beta = 0;$$

$$y_0 - \text{значение } y \text{ при } \alpha = \delta_B = 0;$$

$$M_{x0} - \text{значение } M_x \text{ при } \alpha = \beta = \delta_B = \delta_H = \beta = \omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$$

$$M_{x0} - \text{значение } M_x \text{ при } \alpha = \delta_B = \omega_z = \dot{\alpha} = \dot{\delta}_B = 0$$

$$y^\alpha, \dots, z^{\delta_H}, \dots, M_y^{\dot{\beta}} - \text{частные производные от сил и моментов по соответствующим}$$

параметрам.

Полученная система уравнений (1) – (16) содержит 13 дифференциальных уравнений первого порядка и три геометрических соотношения.

В случае неуправляемого полета или полета с зафиксированными органами управления данная система является замкнутой, т. е. число неизвестных переменных $V(t)$, $\Theta(t)$, $\Psi(t)$, $\gamma_a(t)$, $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$, $\omega_z(t)$, $\psi(t)$, $\mathcal{G}(t)$, $\gamma(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $m(t)$ равно числу уравнений. И в идеальном случае (при отсутствии возмущений) траектория полета полностью определяется начальными условиями.

В случае управляемого полета данная система уравнений не является замкнутой, так как проекции аэродинамических сил и моментов в правых частях уравнений будут зависеть от углов отклонения органов управления:

$$\delta_H(t) - \text{отклонение рулей направления};$$

$$\delta_B(t) - \text{отклонение рулей высоты};$$

$$\delta_\omega(t) - \text{отклонение элеронов};$$

$$\delta_{VP}(t) - \text{отклонение органа регулировки тяги двигателя}.$$

Если задать отклонения органов управления как известные функции времени, то при заданных начальных условиях и номинальных значениях параметров аппарата будет определена единственная траектория движения ЛА, которую назовем траекторией невозмущенного движения.

На самом деле в реальном полете отклонение органов управления осуществляется от программного устройства через автопилот. И вообще бортовая система управления должна обеспечивать вполне определенную функциональную связь между отклонениями органов управления и текущими значениями параметров полета:

$$\left. \begin{aligned} \delta_H &= \delta_H(V, \Theta, \dots, m, \delta_B, \delta_\Delta, \delta_{VP}) \\ \delta_B &= \delta_B(V, \Theta, \dots, m, \delta_H, \delta_\Delta, \delta_{VP}) \\ \delta_\Delta &= \delta_\Delta(V, \Theta, \dots, m, \delta_H, \delta_B, \delta_{VP}) \\ \delta_{VP} &= \delta_{VP}(V, \Theta, \dots, m, \delta_H, \delta_B, \delta_\Delta) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

С учётом этого требования система уравнений (1) – (16), (18) становится замкнутой и для управляемого полета.

В действительном полете начальные условия всегда отличаются от заданных, на ЛА действуют в случае аэродинамические силы, связанные с турбулентностью атмосферы, система управления обрабатывает требуемую функциональную связь (18) параметров полета, с некоторыми, вообще говоря, случайными ошибками. Поэтому параметры полета всегда отличаются от их теоретического значения, а реальную траекторию называют траекторией возбужденного движения.

§ 4. Линеаризация уравнений движения летательного аппарата

Система уравнений движения ЛА является сложной нелинейной системой дифференциальных уравнений.

Основным методом исследования таких уравнений является интегрирование с помощью ЦВМ. В то же время при проектировании системы управления имеется настоятельная необходимость аналитического представления динамических и кинематических характеристик ЛА. Поэтому используют различные методы упрощения уравнений движения, что делает доступными аналитические методы исследования динамики полета. Одним из таких упрощений является линеаризация этих уравнений относительно малых отклонений параметров движения. Параметры возмущенного движения обычно определяют методами численного интегрирования с помощью ЦВМ как известные функции времени:

$$V^*(t); \Theta^*(t), \Psi^*(t) \text{ и т.д.}$$

Параметры возмущенного движения отличаются от параметров невозмущенного движения на некоторую малую величину: $V = V^* + \Delta V$; $\Theta = \Theta^* + \Delta\Theta$; $\Psi = \Psi^* + \Delta\Psi$; $\gamma_a = \gamma_a^* + \Delta\gamma_a$ и т. Д.

1. С целью упрощения получаемых линеаризованных уравнений, учитывая, что в невозмущенном движении углы α^* , β^* обычно невелики, полагают, что $\sin \alpha^* \approx \alpha^*$, $\sin \beta^* \approx \beta^*$; $\cos \alpha^* \approx \cos \beta^* \approx 1$.

2. Будем считать, что изменения массы в возмущенном и в невозмущенном движениях одинаковы и являются известными функциями времени.

3. Предполагаем также, что в невозмущенном движении кинематические параметры бокового движения Ψ^* , ψ^* , β^* , γ_a^* , γ^* , ω_x^* , ω_y^* , а также отклонения органов управления боковым движением δ_H^* , δ_Δ^* и производные по времени от продольных параметров $\dot{\vartheta}^*$, $\dot{\alpha}^*$, $\dot{\Theta}^*$, $\dot{\delta}_B^*$ являются малыми, особенно для аппаратов, у которых применена стабилизация крена и траектория которых лежит в пределах небольшого пространственного угла.

4. При упрощении геометрических соотношений между отклонениями Θ^* и ϑ^* , Ψ^* и ψ^* принимаем, что $\cos \Theta^* \approx \cos \vartheta^*$.

С учётом этих предположений, а также выражений (17) будем считать, что силы и моменты, входящие в правые части уравнений (1) – (16), зависят от следующих параметров [5]:

$$\left. \begin{aligned} &P(V, H); \\ &X(V, H, \alpha, \beta, \delta_B, \delta_H); \\ &Y(V, H, \alpha, \delta_B); \\ &Z(V, H, \beta, \delta_H); \\ &M_x(V, H, \beta, \delta_B, \delta_H, \delta_\Theta, \alpha, \omega_x, \omega_y, \omega_z); \\ &M_y(V, H, \beta, \delta_H, \omega_x, \omega_y); \\ &M_z(V, H, \delta_B, \omega_z). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Проведем линейризацию например уравнения (1):

$$m \frac{dV}{dt} = P(V, H) \cos \alpha \cos \beta - X(V, H, \alpha, \beta, \delta_B, \delta_H) - G \sin \Theta.$$

Придадим параметрам $V, H, \Theta, \beta, \delta_B, \delta_H$ их приращения и введем в уравнение (1) возмущающую силу X_B :

$$m \frac{d(V^* + \Delta V)}{dt} = P(V^* + \Delta V, H^* + \Delta H) \cos(\alpha^* + \Delta \alpha) \cos(\beta^* + \Delta \beta) - G \sin(\Theta^* + \Delta \Theta) - \\ - X(V^* + \Delta V, H^* + \Delta H, \alpha^* + \Delta \alpha, \beta^* + \Delta \beta, \delta_B^* + \Delta \delta_B, \delta_H^* + \Delta \delta_H) + X_B$$

Разложим все функции в последнем уравнении в ряд Тейлора по степеням приращений $\Delta V, \dots, \Delta \delta_H$ и оставим члены порядка малости не выше первой:

$$m \frac{dV^*}{dt} + m \frac{d\Delta V}{dt} = P(V^*, H^*) \cos \alpha^* \cos \beta^* + \left. \frac{\partial P}{\partial V} \right|_* \cos \alpha^* \cos \beta^* \Delta V + \\ + \left. \frac{\partial P}{\partial H} \right|_* \cos \alpha^* \cos \beta^* \Delta H - P(V^*, H^*) \cos \alpha^* \cos \beta^* \Delta \alpha - P(V^*, H^*) \cos \alpha^* \cos \beta^* \Delta \beta - \\ - G \sin \Theta^* - G \sin \Theta^* \Delta \Theta - \left. \frac{\partial X}{\partial V} \right|_* \Delta V - \left. \frac{\partial X}{\partial \alpha} \right|_* \Delta \alpha - \left. \frac{\partial X}{\partial H} \right|_* \Delta H - \left. \frac{\partial X}{\partial \beta} \right|_* \Delta \beta - \left. \frac{\partial X}{\partial \delta_B} \right|_* \Delta \delta_B - \\ - \left. \frac{\partial X}{\partial \delta_H} \right|_* \Delta \delta_H + X_B$$

Для невозмущённых слагаемых в левой и правой частях уравнение (1) справедливо как тождество, поэтому линейризованное уравнение возмущенного движения принимает вид

$$m \frac{d\Delta V}{dt} = P^V \cos \alpha^* \cos \beta^* \Delta V - P^* \cos \beta^* \sin \alpha^* \Delta \alpha - \\ - P^* \cos \alpha^* \sin \beta^* \Delta \beta - G \cos \Theta^* \Delta \Theta - X^V \Delta V - X^H \Delta H - X^\alpha \Delta \alpha - \\ - X^\beta \Delta \beta - X^{\delta_B} \Delta \delta_B - X^{\delta_H} \Delta \delta_H + X_B$$

Так как в силу ранее принятых допущений произведения $\beta \Delta \beta, \delta_H \Delta \beta, \delta_H \Delta \delta_H, \beta \Delta \delta_H$ являются величинами второго порядка малости, то из первого уравнения выражения (17) найдём составляющие приращения силы лобового сопротивления

$$\Delta X = X^V \Delta V + X^H \Delta H + X^\alpha \Delta \alpha + X^\beta \Delta \beta + X^{\delta_B} \Delta \delta_B + X^{\delta_H} \Delta \delta_H,$$

Опуская при записи индекс "*":

$$X^V \Delta V = \frac{\partial X_0}{\partial V} \Delta V \neq 0;$$

$$X^\beta \Delta \beta = (2X^{\beta^2} \beta + X^{\beta \delta_H} \delta_H) \Delta \beta \approx 0;$$

$$X^\alpha \Delta \alpha = (X^{\alpha \delta_B} \delta_B + 2X^{\alpha^2} \alpha) \Delta \alpha \neq 0;$$

$$X^{\delta_B} \Delta \delta_B = (X^{\alpha \delta_B} \alpha + 2X^{\delta_B^2} \delta_B) \Delta \delta_B \neq 0;$$

$$X^{\delta_H} \Delta \delta_H = (2X^{\delta_H^2} + X^{\beta \delta_H}) \Delta \delta_H \approx 0.$$

Таким образом, необходимо найти выражения для X^V , X^α , X^{δ_B} . Для примера найдем развернутое выражение для $X^V = \frac{\partial X_0}{\partial V}$.

Известно [5, 4], что

$$X_0 = C_{X_0} \left(\frac{V}{a} \right) \frac{\rho V^2}{2} S,$$

a – скорость звука, зависящая от высот полета;

ρ – плотность, также зависящая от высоты;

S – характерное сечение;

C_{X_0} – коэффициент лобового сопротивления, зависящий от числа маха $M=V/a$.

В [5, 4] дается физическое толкование и математические выражения для всех аэродинамических сил и моментов. Тогда

$$X^V = \frac{\partial X_0}{\partial V} = C_{X_0}(M) \rho V S + \left(\frac{\partial C_{X_0}}{\partial V} \cdot \frac{\partial M}{\partial V} \right) \frac{\rho V^2}{2} S.$$

$$\text{Обозначив } \frac{\partial C_{X_0}}{\partial M} = C_{X_0}^M, \text{ получим } \frac{\partial X_0}{\partial V} = \left[C_{X_0} + C_{X_0}^M \frac{M}{2} \right] \rho V S.$$

Коэффициенты C_{X_0} и $C_{X_0}^M$ можно вычислить по экспериментальному графику $C_{X_0}(M)$ для заданных значений α и $M = \frac{V}{a}$. (Напомним, что в полученных выражениях фигурируют значения параметров невозмущенной траектории.)

Аналогично вычисляются и другие производные. Тогда окончательно первое уравнение с ил получим в следующем виде:

$$m \frac{d\Delta V}{dt} = (P^V - X^V) \Delta V - (P^\alpha - X^\beta) \Delta \alpha - G \cos \Theta \Delta \Theta - X^{\delta_B} \Delta \delta_B + X_B. \quad (1л)$$

При линеаризации уравнения (2) отбрасывается член $m \frac{d\Theta}{dt} \Delta V$, так как он имеет второй порядок малости согласно допущению, сделанному в § 4 п. 3; второй порядок малости имеют также члены $Z \cos \gamma_a \Delta \gamma_a$, поскольку $Z \Delta \gamma_a = Z^\beta (\beta \Delta \gamma_a) + Z^{\delta_H} (\delta_H \Delta \gamma_a) \sin \gamma_a \Delta \delta_H$ и т. д. Поэтому линеаризованное уравнение (2) имеет следующий вид:

$$m \frac{d\Delta \Theta}{dt} = (P^V \alpha + Y^V) \Delta V + (P + Y^\alpha) \Delta \alpha + G \sin \Theta \Delta \Theta + Y^{\delta_B} \Delta \delta_B + Y_B \quad (2л)$$

Уравнение (3) после линеаризации примет такой вид:

$$-mV \cos \Theta \frac{d\Delta \Psi}{dt} = (P + Z^\beta) \Delta \beta + (P^\alpha + Y) \Delta \gamma_a + Z^{\delta_H} \Delta \delta_H + Z_B \quad (3л)$$

В этом уравнении отброшены члены, содержащие произведения малых величин:

$$\frac{d\Psi}{dt} \Delta V; \frac{d\Psi}{dt} \Delta \Theta; \beta \Delta V; \delta_H \Delta V \text{ и др.}$$

Пример линеаризации четвертого уравнения

$$J_x \frac{d\omega_x}{dt} = M_x - (J_z - J_y)\omega_y\omega_z.$$

Уравнение возмущенного движения примет следующий вид:

$$J_x \frac{d\omega_x}{dt} = \Delta M_x - (J_z - J_y)\omega_y\Delta\omega_z - (J_z - J_y)\omega_z\Delta\omega_y + M_{xB}.$$

На основании (19) можно раскрыть вариацию

$$\begin{aligned} \Delta M_x = & \frac{\partial M_{x0}}{\partial V} \Delta V + \frac{\partial M_{x0}}{\partial H} \Delta H + \frac{\partial M_x}{\partial \alpha} \Delta \alpha + \frac{\partial M_x}{\partial \beta} \Delta \beta + \frac{\partial M_x}{\partial \delta_B} \Delta \delta_B + \\ & + \frac{\partial M_x}{\partial \delta_H} \Delta \delta_H + \frac{\partial M_x}{\partial \delta_\varnothing} \Delta \delta_\varnothing + \frac{\partial M_x}{\partial \omega_x} \Delta \omega_x + \frac{\partial M_x}{\partial \omega_y} \Delta \omega_y + \frac{\partial M_x}{\partial \omega_z} \Delta \omega_z \end{aligned}$$

Величины $\frac{\partial M_{x0}}{\partial V}$ и $\frac{\partial M_{x0}}{\partial H}$ в практических расчетах можно считать малыми, поэтому слагаемые $\frac{\partial M_{x0}}{\partial V} \Delta V \approx 0$; $\frac{\partial M_{x0}}{\partial H} \Delta H \approx 0$. Мал также значения $\omega_z \Delta \omega_y$ и $\omega_y \Delta \omega_z$. Учитывая (17) и принятые допущения, сделанные в п.п. 1-4 данного параграфа, вычислим вариации слагаемых ΔM_x :

$$\frac{\partial M_x}{\partial \alpha} \Delta \alpha = M_x^{\alpha\beta} \beta \Delta \alpha + M_x^{\alpha\omega_y} \omega_y \Delta \alpha + M_x^{\alpha\delta_H} \delta_H \Delta \alpha = 0;$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial \beta} \Delta \beta = M_x^\beta \Delta \beta + M_x^{\alpha\beta} \alpha \Delta \beta + M_x^{\beta\omega_z} \omega_z \Delta \beta + M_x^{\beta\delta_B} \delta_B \Delta \beta = M_x^\beta \Delta \beta;$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial \delta_B} \Delta \delta_B = M_x^{\beta\delta_B} \beta \Delta \delta_B = 0;$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial \delta_H} \Delta \delta_H = M_x^{\delta_H} \Delta \delta_H + M_x^{\alpha\delta_H} \alpha \Delta \delta_H = M_x^{\delta_H} \Delta \delta_H;$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial \delta_\varnothing} \Delta \delta_\varnothing = M_x^{\delta_\varnothing} \Delta \delta_\varnothing;$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial \omega_x} \Delta \omega_x = M_x^{\omega_x} \Delta \omega_x;$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial \omega_y} \Delta \omega_y = M_x^{\omega_y} \Delta \omega_y + M_x^{\alpha\omega_y} \alpha \Delta \omega_y = M_x^{\omega_y} \Delta \omega_y;$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial \omega_z} \Delta \omega_z = M_x^{\beta\omega_z} \beta \Delta \omega_z = 0.$$

Запишем линеаризованное уравнение (4):

$$J_x \frac{d\Delta\omega_x}{dt} = M_x^\beta \Delta \beta + M_x^{\delta_H} \Delta \delta_H + M_x^{\delta_\varnothing} \Delta \delta_\varnothing + M_x^{\omega_x} \Delta \omega_x + M_x^{\omega_y} \Delta \omega_y + M_{xB} \quad (4л)$$

Аналогично линеаризуем уравнение (5) и (6):

$$\begin{aligned} J_y \frac{d\Delta\omega_y}{dt} = & M_y^\beta \Delta \beta + M_y^{\omega_x} \Delta \omega_x + M_y^{\omega_y} \Delta \omega_y + M_y^{\beta\dot{\Delta}} \dot{\Delta} \beta + M_y^{\delta_H} \Delta \delta_H + \\ & + M_y^{\delta_H} \Delta \dot{\delta}_H + M_{yB} \end{aligned} \quad (5л)$$

$$\begin{aligned} J_z \frac{d\Delta\omega_z}{dt} = & M_z^V \Delta V + M_z^\alpha \Delta \alpha + M_z^{\omega_z} \Delta \omega_z + M_z^{\dot{\Delta}} \dot{\Delta} \alpha + M_y^{\delta_B} \Delta \delta_B + \\ & + M_y^{\delta_B} \Delta \dot{\delta}_B + M_{zB} \end{aligned} \quad (6л)$$

Разложение в ряд Тейлора уравнений (7), (8), и (9) относительно малых приращений параметров возмущенной траектории дает следующий результат:

$$\frac{d\Delta\psi}{dt} = \frac{1}{\cos\vartheta} \Delta\omega_y; \quad (7л)$$

$$\frac{d\Delta\vartheta}{dt} = \Delta\omega_z; \quad (8л)$$

$$\frac{d\Delta\gamma}{dt} = \Delta\omega_x - \operatorname{tg}\vartheta\Delta\omega_y. \quad (9л)$$

Линеаризуем геометрическое уравнение связи углов (10):

$$\sin\Theta = \cos\alpha \cos\beta \sin\vartheta - \sin\alpha \cos\beta \cos\vartheta \cos\gamma - \sin\beta \cos\vartheta \sin\gamma.$$

После разложения в ряд Тейлора данное уравнение дает следующее соотношение между вариациями параметров:

$$\begin{aligned} \sin\Theta\Delta\Theta &= -\sin\alpha \cos\beta \sin\vartheta\Delta\alpha - \cos\alpha \sin\beta \sin\vartheta\Delta\beta + \\ &+ \cos\alpha \cos\beta \cos\vartheta\Delta\vartheta - \cos\alpha \cos\beta \cos\vartheta \cos\gamma\Delta\alpha + \\ &+ \sin\alpha \sin\beta \cos\vartheta \cos\gamma\Delta\beta + \sin\alpha \cos\beta \sin\vartheta \cos\gamma\Delta\vartheta + \\ &+ \sin\alpha \cos\beta \cos\vartheta \sin\gamma\Delta\gamma - \cos\beta \cos\vartheta \sin\gamma\Delta\beta + \\ &+ \sin\beta \sin\vartheta \sin\gamma\Delta\vartheta - \sin\beta \cos\vartheta \cos\gamma\Delta\gamma. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом допущений, сделанных в п.п. I – 4 данного параграфа, получаем:

$$\Delta\Theta = \Delta\vartheta - \Delta\alpha. \quad (10л)$$

Уравнения (11) и (12) приводятся соответственно к виду

$$\Delta\Psi = \Delta\psi + \frac{\alpha}{\cos\Theta} \Delta\gamma - \frac{1}{\cos\Theta} \Delta\beta; \quad (11л)$$

$$\Delta\gamma_a = \operatorname{tg}\Theta\Delta\beta + \frac{\cos\vartheta}{\cos\Theta} \Delta\gamma. \quad (12л)$$

Аналогично получаем линеаризованные кинематические уравнения (13)-(15) движения центра масс ЛА в земной системе координат:

$$\frac{d\Delta X}{dt} = \cos\Psi \cos\Theta\Delta V - V \cos\Psi \sin\Theta\Delta\Theta - V \cos\Theta \sin\Psi\Delta\Psi; \quad (13л)$$

$$\frac{d\Delta Y}{dt} = \frac{d\Delta H}{dt} = V \cos\Theta\Delta\Theta + \sin\Theta\Delta V; \quad (14л)$$

$$\frac{d\Delta Z}{dt} = -\cos\Theta \sin\Psi\Delta V + V \sin\Theta \sin\Psi\Delta\Theta - V \cos\Theta \cos\Psi\Delta\Psi; \quad (15л)$$

Уравнение (16) – линейно.

Таким образом, получена линеаризованная система дифференциальных уравнений пространственного движения ЛА (1л) – (16л). Анализ динамических свойств ЛА как объекта управления осуществляется в динамике полета на основе именно этих уравнений.

В качестве дальнейших шагов в упрощении линеаризованных уравнений движения ЛА применяют принцип «замороженных коэффициентов», что позволяет свести исходную систему к системе линейных уравнений с постоянными коэффициентами. И, наконец, проводят разделение уравнений движения на три независимые группы, которые характеризуют движение ЛА по каналу тангажа, курса и крена.

Эти вопросы в данном пособии не рассматриваются.

Полная система линеаризованных уравнений имеет вид:

$$m \frac{d\Delta V}{dt} = (P^V - X^V)\Delta V - (P^\alpha - X^\beta)\Delta\alpha - G \cos\Theta\Delta\Theta - X^{\delta_B} \Delta\delta_B + X_B \quad (1л)$$

$$m \frac{d\Delta\Theta}{dt} = (P^V \alpha + Y^V)\Delta V + (P + Y^\alpha)\Delta\alpha + G \sin\Theta\Delta\Theta + Y^{\delta_B} \Delta\delta_B + Y_B \quad (2л)$$

$$-mV \cos\Theta \frac{d\Delta\Psi}{dt} = (P + Z^\beta)\Delta\beta + (P^\alpha + Y)\Delta\gamma_a + Z^{\delta_H} \Delta\delta_H + Z_B \quad (3л)$$

$$J_x \frac{d\Delta\omega_x}{dt} = M_x^\beta \Delta\beta + M_x^{\delta_H} \Delta\delta_H + M_x^{\delta_\Theta} \Delta\delta_\Theta + M_x^{\omega_x} \Delta\omega_x + M_x^{\omega_y} \Delta\omega_y + M_{xB} \quad (4\text{л})$$

$$J_y \frac{d\Delta\omega_y}{dt} = M_y^\beta \Delta\beta + M_y^{\omega_x} \Delta\omega_x + M_y^{\omega_y} \Delta\omega_y + M_y^{\dot{\beta}} \Delta\dot{\beta} + M_y^{\delta_H} \Delta\delta_H + M_y^{\dot{\delta}_H} \Delta\dot{\delta}_H + M_{yB} \quad (5\text{л})$$

$$J_z \frac{d\Delta\omega_z}{dt} = M_z^V \Delta V + M_z^\alpha \Delta\alpha + M_z^{\omega_z} \Delta\omega_z + M_z^{\dot{\alpha}} \Delta\dot{\alpha} + M_y^{\delta_B} \Delta\delta_B + M_y^{\dot{\delta}_B} \Delta\dot{\delta}_B + M_{zB} \quad (6\text{л})$$

$$\frac{d\Delta\psi}{dt} = \frac{1}{\cos\vartheta} \Delta\omega_y; \quad (7\text{л})$$

$$\frac{d\Delta\vartheta}{dt} = \Delta\omega_z; \quad (8\text{л})$$

$$\frac{d\Delta\gamma}{dt} = \Delta\omega_x - \text{tg}\vartheta \Delta\omega_y. \quad (9\text{л})$$

$$\Delta\Theta = \Delta\vartheta - \Delta\alpha. \quad (10\text{л})$$

$$\Delta\Psi = \Delta\psi + \frac{\alpha}{\cos\Theta} \Delta\gamma - \frac{1}{\cos\Theta} \Delta\beta; \quad (11\text{л})$$

$$\Delta\gamma_a = \text{tg}\Theta \Delta\beta + \frac{\cos\vartheta}{\cos\Theta} \Delta\gamma. \quad (12\text{л})$$

$$\frac{d\Delta X}{dt} = \cos\Psi \cos\Theta \Delta V - V \cos\Psi \sin\Theta \Delta\Theta - V \cos\Theta \sin\Psi \Delta\Psi; \quad (13\text{л})$$

$$\frac{d\Delta Y}{dt} = \frac{d\Delta H}{dt} = V \cos\Theta \Delta\Theta + \sin\Theta \Delta V; \quad (14\text{л})$$

$$\frac{d\Delta Z}{dt} = -\cos\Theta \sin\Psi \Delta V + V \sin\Theta \sin\Psi \Delta\Theta - V \cos\Theta \cos\Psi \Delta\Psi; \quad (15\text{л})$$

$$\frac{dm}{dt} = -|\dot{m}(t)|, \quad (16)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбатенко С. А. и др. Расчет и анализ движения летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1971.
2. Горбатенко С. А. и др. Механика полета. Общие сведения. Уравнения движения. – М.: Машиностроение, 1969.
3. Дмитриевский А. А. Внешняя баллистика. – М.: Машиностроение, 1972.
4. Дмитриевский А. А. и др. Движение ракет (Введение в теорию полета ракет). – М.: изд. ВИМО, 1968.
5. Лебедев А. А., Чернобровкин Л. С. Динамика полета беспилотных летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1973.
6. Микеладзе В. Г., Титов В. М. Основные геометрические и аэродинамические характеристики самолетов и ракет. – М.: Машиностроение, 1978.